Painleveの方程式によって定義される葉層構造について (微分方程式の幾何学的方法)

AUTHOR(S):

岡本, 和夫

数理解析研究所講究録
316巻 1977年 19-26

Painlevé の方程式によって定義される葉層構造について。

東大・理　岡本和夫

$a(x), b(x), c(x)$ を $\mathbb{C}$ で定義された整函数として、Riccatiの微分方程式

(1) $$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

を考える。初期条件

(2) $$y(x_0) = y_0 \quad , \quad x_0 \in \mathbb{C} \ , \quad y_0 \in \mathbb{C}$$

を満たすような整型(holomorphe)な解は $x=x_0$ の近傍で唯ひとつ存在することがCauchyの定理によって保証されるが、このような解は全て $\mathbb{C}$ 上有理形な函数を定義する。これは古典的な結果であるが、このような性質を有する方程式を一般に動く分岐点をもたない方程式という。方程式(1)の場合、全ての解は初期条件(2)と極条件($x=x_0$ で有理形な解を保証する)

(2)' $$y(x_0) = \infty$$

によって一意的に保証される。この事は、見方を変えれば(1)の方程式はfibre[redacted]空間(fibré)

(3) $$\mathcal{P}=(\mathbb{P}^1\times\mathbb{C},\ \pi,\ \mathbb{C})$$

において各fibreに横断的(transverse)な[redacted]葉層構造を定義しており、しかも各葉は底空間$\mathbb{C}$上の被覆となっている、というとらえ方をしても良いわけである。各葉が、上にのべた性質をもつ時、(1)に於いて、この方程式から定義される葉層構造は(3)で一様(uniforme)であるという事にする。(3)の各fibre

$$\pi^{-1}(x_0)\cong\mathbb{P}^1$$

を(1)の初期値の空間という事は自然であろう。

一般に、動く分岐点をもたない方程式

(4) $$y_j'=F_j(x,y_1,\cdots,y_n)\qquad(j=1,\cdots,n)$$

がある fibré

(5) $$\mathcal{P}=(E,\ \pi,\ B)$$

Bは$\mathbb{C}$の領域

に各fibreにtransverseな葉層構造を定義し、しかもこの葉層構造がuniformeである時に、(5)を(4)に付随する<u>P-型空間</u>と呼ぶ。ただしこの時、全ての(4)の解は(5)のなかで定義されているある葉に対応付けられているとする。(4)と(5)が与えられれば、(5)の各fibre

$$\pi^{-1}(x_0)=E_{x_0}\qquad x_0\in B$$

を(4)の初期値の空間、あるいは簡単に<u>C-型空間</u>と呼ぶ。

高階の方程式

(4)′ $$y^{(n)} = R(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

を考察する場合は、これを適当な変数をとることによって(4)の[redacted]型になおして論ずればよいが、ひとつ注意を要するのは変数のとり方によっては、(4)′の解でないものが(4)の形の方程式に現われる場合があるという事である。たとえば

$$\begin{cases} y' = yz \\ z' = 0 \end{cases}$$

は容易にわかる様に２階の方程式

$$y'' = \frac{1}{y}(y')^2$$

から得られるが、前者の特殊解 $y \equiv 0$, $z \equiv c$ (定数) は後者の解とは言えない。(特異解は考えないことにする)

さて、本編の目的は、動く分岐点をもたない２階の Painlevé の方程式についてそれの P-型並びに C-型空間を決定しようという事である。Painlevé の[redacted]方程式というのは次のような６つの微分方程式である。

(I) $$y'' = 6y^2 + x$$

(II) $$y'' = 2y^3 + xy + \alpha$$

(III) $$y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

(IV) $$y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}$$

(V) $$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma}{x}y + \delta\frac{y(y+1)}{y-1}$$

(VI) $$y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)(y')^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'$$
$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\frac{\beta x}{y^2}+\gamma\frac{x-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

ここで$\alpha,\beta,\gamma,\delta$は定数である。これらの定数が一般の場合、方程式の解が既知函数で表わせない事は知られている。いま、一例として(I)を考えてみよう。初期条件

$$y(x_0)=y_0\,,\quad y'(x_0)=y_0'\qquad (y_0,y_0')\in\mathbb{C}^2$$

を満たす整型な解が一意的に存在するから、この方程式に付随するP-型空間(5)の各Fibre、即ちC-型空間は$\mathbb{C}^2$を含む。しかし、Riccatiの方程式の場合と同様、これらの解は$\mathbb{C}$上有理形であるから、C-型空間は$\mathbb{C}^2$と一致することはない。他方極条件 $y(x_0)=\infty$, $y'(x_0)=\infty$ という条件からだけでは解は一意的には決まらない。そこで、$x=x_0$ で極をもつような全ての解をひとつひとつ特徴付けるようなパラメーターをとって$\mathbb{C}^2$を少しふくらませなければならない。尚、もしC-型空間が求められたとしてもそれはコンパクトにはならない事を注意しておく。

我々はまず、上記の方程式に対応する連立方程式

$$\begin{cases} y'=F(x,y,z)\\ z'=G(x,y,z)\end{cases}$$

を右辺がyとzの多項式となるように(変数zをえらんで)決める。(I)については $y'=z$ とすればよいが、その他については

zを次のようにとる。

$$
(\mathrm{II})' \quad \begin{cases} y' = y^2 + \frac{1}{2}x + z \\ z' = \frac{1}{2}(2\alpha - 1) - 2yz \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III})' \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x}\,[y^2z - (\theta_\infty xy^2 + \eta_0 y - \theta_0 x)] \\ z' = -\frac{1}{x}\,[yz^2 - (2\theta_\infty xy + \eta_0)z + \theta_0(\eta_0 + \eta_\infty)x] \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IV})' \quad \begin{cases} y' = 2yz - y^2 - 2xy - \theta_0 \\ z' = -\,[z^2 - 2(x+y)z + \eta_0] \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IV})'_{\mathrm{bis}} \quad \begin{cases} y' = 2y^3z - \theta y^2 + 2xy + 1 \\ z' = -\,[3y^2z^2 - 2(\theta y - x)z + \eta] \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{V})' \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x}\,[2y(y-1)^2z - ((\theta_0 + \eta)y^2 - (2\theta_0 + \eta - \theta_1 x)\,y + \theta_0] \\ z' = -\frac{1}{x}\,[(y-1)(3y-1)z^2 - (2(\theta_0+\eta)y - 2\theta_0 - \eta + \theta_1 x)z \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4}((\theta_0+\eta)^2 - \theta_\infty^2)] \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{VI})' \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x(x-1)}\,[y(y-1)(y-x)z \\ \qquad\qquad + \theta_0(y-1)(y-x) + \theta_1 y(y-x) + (\theta_x+1)\,y(y-1)] \\ z' = \frac{-1}{x(x-1)}\,[(\frac{3}{2}y^2 - (x+1)\,y + \frac{1}{2})z^2 \\ \qquad\qquad + ((2\theta_0 + \theta_1 + \theta_x + 1)\,y - (x+1)\theta_0 - x\theta_1 - \theta_x - 1)z \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}((\theta_0 + \theta_1 + \theta_x + 1)^2 - \theta_\infty^2)] \end{cases},
$$

これらの方程式のいくつかは、Malmquist が発見したものであるが、もとの方程式との関連でこれら多項式型の方程式について意味づけを与えることができる。θ_0とかθ_xとか書いたものは任意定数でもとの方程式の含む定数α, β等々との関係を次頁に書いておく。

(III)'	;	$\alpha = -\theta_\infty(1+\eta_\infty)$,	$\beta = \theta_0(1+\eta_0)$
		$\gamma = \theta_\infty^2$,	$\delta = -\theta_0^2$
(IV)'	;	$\alpha = \eta_0 + 1 - \frac{1}{2}\theta_0$,	$\beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2$
(V)'	;	$\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2$,	$\beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2$
		$\gamma = \theta_1(-\eta-1)$,	$\delta = -\frac{1}{2}\theta_1^2$
(VI)'	;	$\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2$,	$\beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2$
		$\gamma = \frac{1}{2}\theta_1^2$,	$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta_x^2$.

次に我々はもうひとつの定数εを次のように定義する。

Equations		ε
(I)	;	0
(II)	;	$\frac{1}{2}(2\alpha-1)$
(III)	;	$\eta_0 + \eta_\infty$
(IV)	;	$\eta_0 - \theta_0$
(V)	;	$\frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_\infty + \eta)$
(VI)	;	$-1 - \theta_0 - \theta_1 - \theta_\infty - \theta_x$

この量εは、我々の考察において重要である。まず次の事は容易にわかる。

<u>定理</u>　<u>方程式(II)〜(VI)について$\varepsilon=0$となる時(定数θ_0等々が特別の値のとき)、各々の方程式はRiccatiの方程式を満足するような特殊解をもつ</u>。

さて Painlevé の方程式の各々に付随する P-型空間を

(5) $\qquad \mathcal{P}=(E,\pi,B)$

とする。このとき各 fibre、即ち C-型空間は次の事によって特徴づけられる。M を C-型空間とすれば

(i) M は $\mathbb{C}^2$ のあるコンパクト化 $\overline{M}$ に含まれる。$\overline{M}$ は代数曲面(有理的しかし極小ではない)

(ii) $\overline{M}$ は極小有理曲面 $\Sigma^{(2)}_{(\varepsilon)}$ を定まったやり方で blowing-up することにより得られる。ここで $\Sigma^{(2)}_{(\varepsilon)}$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1=\{(s,\zeta_0)\}$ ともうひとつの $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1=\{($[redacted]$t,\zeta_1)\}$ を

$$st=1, \qquad \zeta_0=\varepsilon t-t^2\zeta_1$$

によってはり合わせたものである。ε はすぐ上に定義した定数である。

(iii) blowing-up の回数は全ての方程式に対して 8 回である。すなわち $C_1^2(\overline{M})=0$。

(iv) $\overline{M}-M$ は連結な代数的部分集合で、各既約成分は $\mathbb{P}^1$ である。ただしこれらは例外曲線とは限らない。また $\overline{M}$ の例外曲線であって M と交わるものも存在する。

(v) 各 $\overline{M}-M$ の既約成分は方程式から定義される葉層構造を上の P-型空間(5)のコンパクト化

(5)′ $\qquad \mathcal{P}'=(\overline{E},\overline{\pi},B)$

に拡張した時、各 fibre に含まれるような葉に対応する。2つ

の、このような垂直な葉を定義する$\mathbb{P}^1$の交わりは拡張された葉層構造の特異点である。

(vi) $\overline{M}$に含まれる代数曲線Cであって$\overline{M}-M$と交わらないもの即ちMに含まれてしまうものが存在する。従ってMは$\mathbb{C}^2$を含むが、Stein多様体ではなく、強擬凸領域で内側から近似されるという意味で擬凸ではない。さらにM上の定数でない正則関数は存在しない。